Erwartungswert u.a.

1. Erwartungswert
2. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen
3. Varianz und Standardabweichung
4. Spiele bewerten

Datei Nr. 31310

Stand 30. Januar 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

http://mathe-cd.de

Vorwort

Mit diesem neu geschriebenen Taxt erkläre ich zunächst den Begriff Zufallsvariable, der auch schon in 31102 verwendet worden ist. Dann folgt das Thema Erwartungswert einer Zufallsvariablen.
Es folgen Übungen zur Varianz und Standardabweichung.
Schließlich zeige ich an 7 Beispielen, wie man Spiele bewertet, das heißt die Wahrscheinlichkeits-Verteilung der Ergebnisse ermittelt und die Gewinnerwartung berechnet.

Eine zusätzliche große Aufgabensammlung zu diesem Thema hat die Nummer 31312.
Dort kann man sich nach Lust und Laune in allerlei Aufgaben austoben.

Inhalt

1 Wichtige Hinweise zur Schreibweise von Ereignissen

Das Ziehen von Karten aus einem Stapel, das mehrfache Würfeln nacheinander, oder das Ermitteln von Buchstaben nacheinander, aus denen man dann ein Wort bildet usw. sind mehrstufige Experimente. Weil es dabei auf die Reihenfolge der einzelnen „Ziehungen" ankommt, muss man auch durch die Schreibweise ausdrücken, dass die Reihenfolge durch das Ziehen festgelegt und nicht verändert werden darf. Dazu gibt es verschiedene Schreibweisen.

Geordneten Paare, Tripel usw.:

a) Man zieht aus einem Kartenstapel der Reihe nach Karten mit den Farben rot, schwarz, rot. Dann drückt man dieses Ergebnis durch das Tripel (r,s,r) aus. Günstiger sind meist die Schreibweisen $(r;s;r)$ oder $(r\,|\,s\,|\,r)$, vor allem dann wenn man statt Buchstaben Zahlen hat, um nicht das Dezimalkomma zu verwechseln. Man kann aber auch – wenn keine Verwechselungsgefahr besteht die Buchstaben zu einem Wort aneinanderfügen und dieses Ziehungsergebnis durch rsr ausdrücken.

   Falsch sind jedoch die Schreibweisen $\{r,s,r\}$ oder $\{r;s;r\}$, denn sie stellen eine Menge mit drei Elementen dar, und in ihr darf man die Elemente vertauschen und muss sogar doppelte weglassen. Somit gilt hier $\{r,s,r\} = \{r,r,s\} = \{s,r,r\} = \{r,s\} = \{s,r\}$.

b) **Beispiel:** Aus einem Stapel mit 6 Karten, auf denen die Buchstaben A,B,E,M,U,S aufgedruckt sind, werden 4 Karten zufällig entnommen und nach jedem Zug wieder zurückgelegt. Man notiert die gezogenen Buchstaben und bildet daraus ein Wort.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei dreimaligem Ziehen von 4 Karten dieses Ereignis: $E = \{maus, saum, mumm, baum\}$?
   Hier bewährt sich die abkürzende Schreibweise gegenüber der gebräuchlichsten Form:
   $E = \{(m;a;u;s),(s;a;u;m),(m;u;m;m),(b;a;u;m)\}$
   Man darf nur nicht das Ziehungsergebnis „saum" in der Form $\{s;a;u;m\}$ als Menge schreiben, dann ist die Reihenfolge der Ziehungen nicht mehr festgelegt, denn es gilt ja:
   $\{s;a;u;m\} = \{m;a;u;s\} = \{a;u;m;s\} = ...$

c) **Beispiel:** Aus drei Würfelergebnissen kann man jeweils eine dreistellige Zahl bilden:
   $A = \{115;666;254;515;246\}$. Dies waren die Ergebnisse von fünf Dreierwürfen.

d) Das Ereignis $\{2,3;4\}$ enthält genau zwei Ergebnisse, nämlich die Zahl 2,3 und die Zahl 4.

2 Zufallsvariable Mittelwert – Erwartungswert Wahrscheinlichkeitsverteilung

2.1 Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bei mehrstufigen Experimenten wird sehr oft das Auftreten eines bestimmten Ergebnisses gezählt. Um sich dann besser ausdrücken zu können, verwendet man dazu eine **Zählvariable**, meistens **Zufallsvariable** genannt. Man gibt ihr zur Abkürzung einen Großbuchstaben,

Beispiel 1

Klaus hat 100-mal gewürfelt und alle Würfelergebnisse aufgeschrieben. Das formuliert man nun so:

Die Werte der Zufallsvariablen „X = gewürfelte Augenzahl“ stehen in dieser Liste:

Ergebnis X	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	18	15	8	22	17	20
Relative Häufigkeit	$\frac{18}{100} = 0{,}18$	$\frac{15}{100} = 0{,}15$	$\frac{8}{100} = 0{,}08$	$\frac{22}{100} = 0{,}22$	$\frac{17}{100} = 0{,}17$	$\frac{20}{100} = 0{,}20$

Weil diese Würfelergebnisse durch den Zufall gesteuert werden, schwanken Sie von Experiment zu Experiment. Interessanterweise hat aber die Anzahl der Versuche einen Einfluss auf die Ergebnisse. Je größer der Umfang der Stichprobe ist, desto mehr stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten. Liegt ein idealer Würfel vor, können wir auf lange Sicht (eigentlich für unendlich langes Würfeln) für alle Werte von X dieselbe relative Häufigkeit erwarten, und diese ist $p = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$ **. Dies ist ein Ergebnis der Statistik.**

Nun wechseln wir in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer Zahl ist die vorhergesagte relative Häufigkeit.
Wir können also vorhersagen, dass jedes Würfelergebnis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ hat.

Man nennt das die <u>Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X</u>:
Für jedes $\mathbf{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$ gilt $\mathbf{P(X = x) = \frac{1}{6}}$

2.2 Berechnung des Mittelwerts einer Zufallsvariablen

Wenn man 10-mal gewürfelt hat. Kann man den Mittelwert der Würfelergebnisse so berechnen:
Man dividiert die Summe der 10

$$\overline{x} = \frac{3+5+1+1+6+2+5+4+2+2}{10} = \frac{31}{10} = 3{,}1 \quad .$$

Diese Methode wäre bei 100 Würfen zu umständlich, denn man müsste Hundert Augenzahlen addieren. Das macht man kürzer so (ich verwende die Ergebnisse der Tabelle aus 2.1):

$$\overline{x} = \frac{1\cdot 18+2\cdot 15+3\cdot 8+4\cdot 22+5\cdot 17+6\cdot 20}{100} = \frac{365}{100} = 3{,}65$$

Ist die Methode klar? Die 1 kam 18-mal vor, die 2 15-mal usw. Man summiert also die Produkte aus Augenzahl mal absoluter Häufigkeit. Dies kann man als allgemeine Formel aufschreiben (und dies sollte man üben!):

$$\overline{x} = \frac{x_1\cdot n_1 + x_2\cdot n_2 + \ldots + x_k\cdot n_k}{n} \qquad \text{(H1)}$$

Hierin bedeuten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die insgesamt k *verschiedenen* Werte, die vorgekommen sind.

Diese treten mit den dazu gehörenden absoluten Häufigkeiten $n_1, n_2, \ldots, n_k$ auf.

Addiert man diese Häufigkeiten, erhält man die Gesamtzahl der addierten Werte: $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Mit der Summenformel sieht das so aus: $\overline{x} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} n_i\cdot x_i$

Jetzt folgt ein ganz interessantes Vorgehen. Ich zerlege die Formel (H1) in einzelne Brüche:

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} = x_1\cdot\frac{n_1}{n} + x_2\cdot\frac{n_2}{n} + \ldots + x_k\cdot\frac{n_k}{n}$$

Die nun auftretenden Brüche sind die **relativen Häufigkeiten** der einzelnen Merkmalswerte:

$$h_1 = \frac{n_1}{n},\quad h_2 = \frac{n_2}{n},\quad ,\ h_k = \frac{n_k}{n}$$

Damit sieht die neue Formel so aus:

$$\boxed{\overline{x} = x_1\cdot h_1 + x_2\cdot h_2 + \ldots + x_k\cdot h_k} \qquad \text{(H2)}$$

bzw. $\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} h_i\cdot x_i$ wenn es k verschiedene Werte gibt.

Mit anderen Worten: Kennt man die relativen Häufigkeiten der einzelnen Werte, dann kann man mit (H2) den Mittelwert so berechnen:

$$\overline{x} = 1\cdot 0{,}18 + 2\cdot 0{,}15 + 3\cdot 0{,}08 + 4\cdot 0{,}22 + 5\cdot 0{,}17 + 6\cdot 0{,}20 = 3{,}65$$

Die relativen Häufigkeiten habe ich der Tabelle entnommen.

2.3 Berechnung des Erwartungswerts einer Zufallsvariablen

Jetzt wechseln wir von der Statistik in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wir wollen für unseren idealen Würfel den Mittelwert voraussagen. Unser Testergebnis ist ja rein zufallsgesteuert und wir würden bei den nächsten 100 Würfen fast sicher zu einem anderen Mittelwert kommen. **Der zu erwartende Mittelwert heißt Erwartungswert.**

Wir berechnen ihn mit derselben Formel wie oben, nur dass wir an Stelle der experimentell ermittelten relativen Häufigkeiten die vorhergesagten Werte nehmen, also die Wahrscheinlichkeiten, die für jede Augenzahl $p = \frac{1}{6}$ beträgt:

$$\boxed{E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k} \qquad \text{(EW)}$$

Angewandt auf unser Würfelexperiment: